

GeoGebra-MMS in Unterricht und Prüfung

WS B4

MaTeGnu

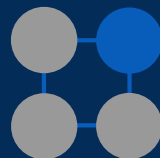
Dr. Susanne Digel

1.10.2024

Mathematik lehren und lernen



GeoGebra-Institut
Landau (RLP)



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

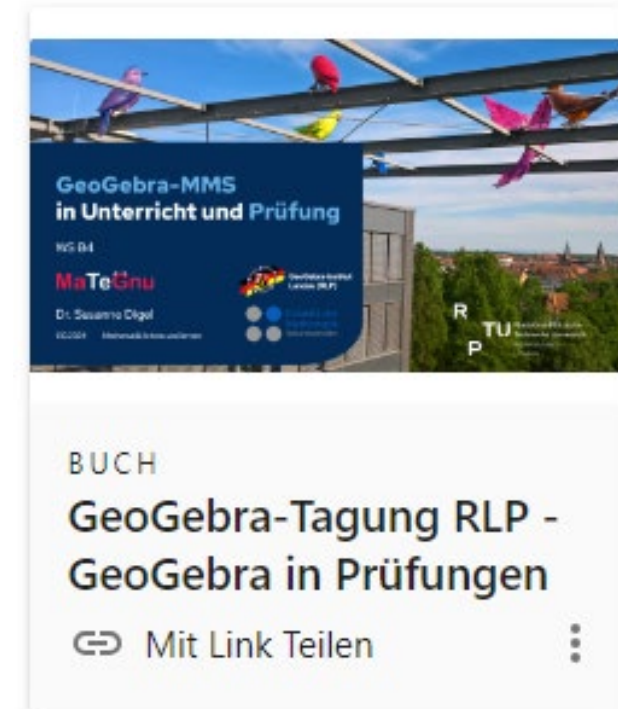
R
TU
P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



GeoGebra-Buch zum Workshop

<https://www.geogebra.org/m/f8nsnvus>





GeoGebra als Werkzeug in Tests, Klassen- und Kursarbeiten:

Ihre Gedanken dazu

Tauschen Sie sich zu zweit aus über Ihre
Hoffnungen, *Befürchtungen* und *Überlegungen*.



R

TU
P Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



GeoGebra als digitales Mathematikwerkzeug in Unterricht und Prüfung

1. GeoGebra als Werkzeug in Aufgaben
2. Unterricht und Prüfungen zusammen denken
3. GeoGebra Prüfungsmodus

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU



1

GeoGebra als modulares Mathematikwerkzeug in Aufgaben

Kompetenzorientierte Aufgabe



Aufgabe

Gib die Funktionsgleichung einer Funktion an, für die gilt: $\int_{-1}^3 f(x) dx = 0$
Stelle deinen Lösungsweg nachvollziehbar dar.

Sie sind dran!

*Lösen Sie die Aufgabe zunächst ohne und anschließend mit GeoGebra.
Notieren Sie jeweils welche Kompetenzen diese Aufgabe erfordert.*





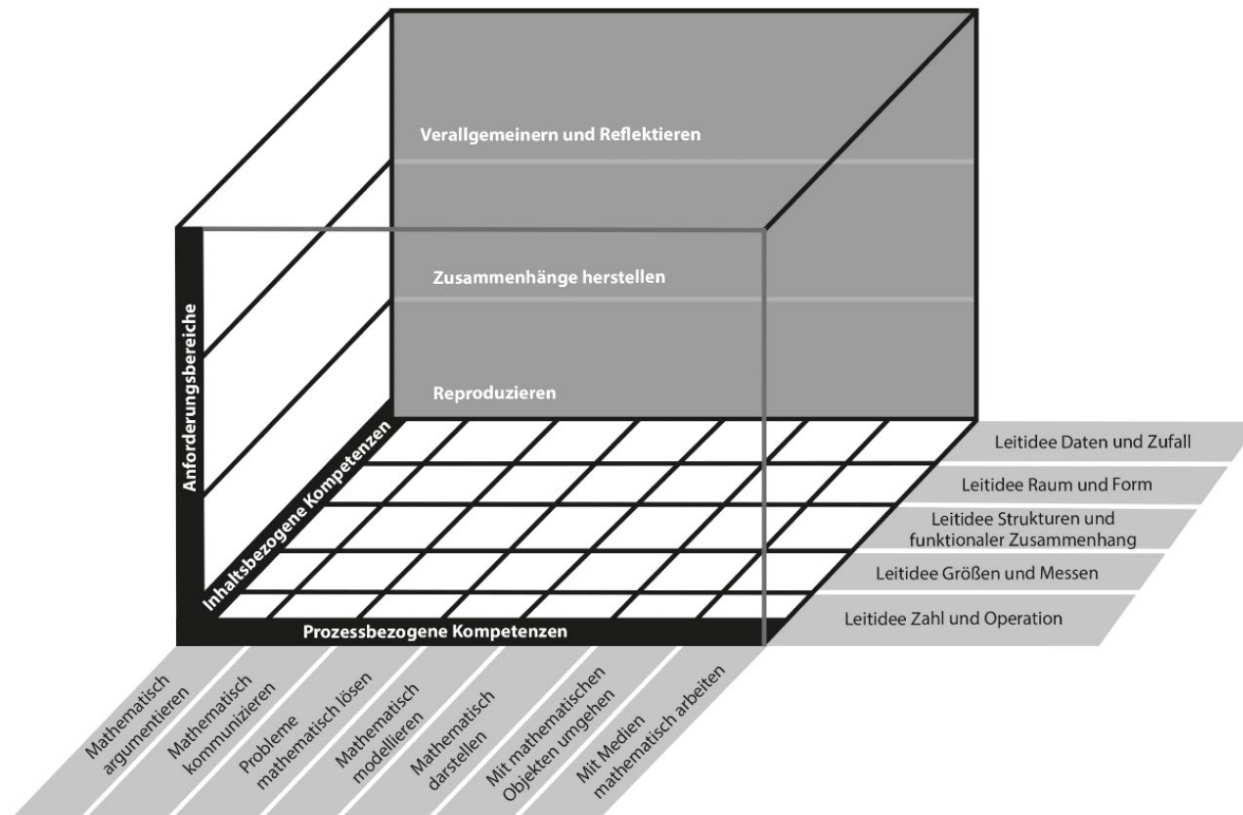
Fachliche Bildung in der digitalen Welt – Ansatzpunkte schulischer Bildung

- **Fachliche Kompetenzen digital fördern**
Lernen MIT Medien
- **Digitale Kompetenzen fachlich fördern**
Lernen ÜBER Medien
- **Fachliche digitale Kompetenzen über KMK-Standard hinaus**
Offenheit für neue fachliche Gegenstände und Kompetenzen
- **Digitale personale Bildung im Fachunterricht**
fachspezifische Reflexions- und Kritikfähigkeit über digitale Medien



Neuer Kompetenzbereich „Mit Medien mathematisch arbeiten“

- Fachliche Kompetenzen digital fördern – Lernen MIT Medien
- Digitale Kompetenzen fachlich fördern – Lernen ÜBER Medien



Kennenlernen
und Vertiefen
der Arbeit mit
Tabellenkalkulation

Vertiefen der Bruchrechnung
durch Reflektieren und
Strukturieren der nötigen
Rechenschritte (Algorithmus)

Erstelle eine „Bruchadditions-Maschine“.

	A	B	C	D	E
10	Multiplikation von Brüchen				
11					
12	3	*	9	=	27
13	8		5		40
14					
15					

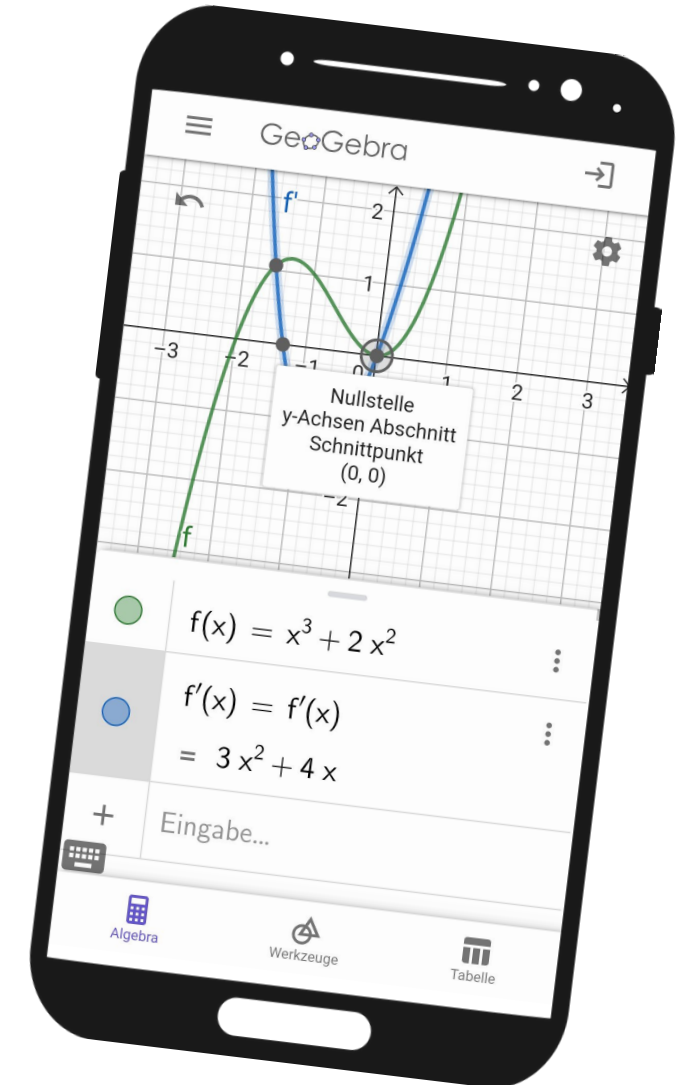
Digitale Werkzeuge → modulare Mathematikssysteme (MMS)



Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematikunterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme und als deren Integration
- dynamische Mathematik-Systeme [Multi-Repräsentations-Systeme, modulare Mathematikssysteme (MMS)].





Aufgabe

Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $(x + 2)^2 - 1 = 0$ b) $(x + 2)^2 + 2 = 0$ c) $(x + 2)^2 = 0$

Sie sind dran!

Lösen Sie die Aufgabe mit GeoGebra.

Notieren Sie welche Kompetenzen diese Aufgabe erfordert und welche „von GeoGebra abgenommen“ werden.





Oberflächlich

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen	
Konzeptuell	Prozedural
- Fakten abrufen, angeben, beschreiben - Wiedergeben, nennen, benennen - Aufzählen, Beispiele angeben	- Rechnen und Formeln nutzen - Algorithmus/Verfahren ausführen - Bestimmen, Ermitteln
2 Verstehen, Anwenden & Begründen	
Konzeptuell	Prozedural
- Erklären von Bedeutungen - Begründen mathematischer Sachverhalte - Vernetzen von Inhalten und Darstellungen - Beispiele und Gegenbeispiele finden - Formalisieren/Schematisieren - Mathematisieren (mit Modell finden),	- Erläutern von Rechenwegen - Flexibel rechnen, einen Algorithmus modifiziert nutzen, überschlagen/schätzen, Lösungsweg bewusst wählen - Einfaches Mathematisieren (mit vorgegebenem Modell) - Strategien nutzen - Entscheiden ohne Begr., rechnerisch begründen & nachweisen, zeigen
3 Analysieren, Bewerten & Beweisen	
- Explorieren: Erfassen, Ausprobieren, Vermuten, Systematisieren, begründet vermuten - Muster fortsetzen & finden: charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, Abstrahieren - Strukturieren: Klassifizieren, Kategorisieren, Analogisieren, Vergleichen - Generalisieren: Zusammenhänge erfassen und allgemein Beschreiben - Überprüfen: Beurteilen, Entscheiden mit Begründung, Validieren, Reflektieren, (Formal) Beweisen - Geeignete Darstellungen finden, analysieren und interpretieren	
4 Kreativ neu denken	
- Komplexe inner- und außermathematische Probleme lösen - Hypothesen aufstellen, eigene Ideen entwickeln, Situationen/Modelle/tragfähige Begriffe erfinden - Neue Perspektiven einnehmen, Planen/Bearbeitungsprozesse strukturieren, Recherchieren - Metakognitiv und kritisch reflektieren	

Tiefgehend



Aufgabe

1. Leite die Funktion $f(x) = (x^3 - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{x}$ ab.
2. Gib weitere Funktionen an, die ähnlich wie $f(x)$ mit einer Kombination aus Summen- und Quotientenregel ableiten lassen.
3. Wann sollte man zuerst die Summenregel, wann die Quotientenregel anwenden? Finde für beide Situationen Beispiele und löse sie mit GeoGebra.
4. Formuliere eine Regel, wann man in so strukturierten Ausdrücken zuerst die Quotientenregel anwenden sollte.

Sie sind dran!

Identifizieren Sie die kognitiven Aktivitäten der unterschiedlichen Adaptionen von Grundaufgabe 1 in den weiteren Teilaufgaben.



kognitive Aktivitäten - Beispiel



Aufgabe

1. Leite die Funktion $f(x) = (x^3 - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{x}$ ab.

2. Gib weitere Funktionen an, die ähnlich wie $f(x)$ mit einer Kombination aus Summen- und Quotientenregel ableiten lassen.

3. Wann sollte man zuerst die Summenregel, wann die Quotientenregel anwenden?
Finde für beide Situationen Beispiele und löse sie mit GeoGebra.

4. Formuliere eine Regel, wann man in so strukturierten Ausdrücken zuerst die Quotientenregel anwenden sollte.

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen

Prozedural

- Rechnen und Formeln nutzen
- Algorithmus/Verfahren ausführen
- Bestimmen, Ermitteln

2 Verstehen, Anwenden & Begründen

Konzeptuell

- Beispiele finden

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

„Produktiv ergänzen“

- Muster fortsetzen

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen

Prozedural

- Rechnen und Formeln nutzen
- Algorithmus/Verfahren ausführen
- Bestimmen, Ermitteln

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Generalisieren

Erinnerung Vortrag Basisqualifizierung

Aufgaben für (Grund-)Vorstellungen öffnen

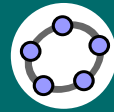


Was wird gefordert?	Beispiele für Aufgabentypen
(Grund-)Vorstellungen zur Mathematisierung nutzen	(1) Eine gegebene Sachsituation mathematisieren (vgl. Aufgabe 1) (2) Analysieren einer falschen Mathematisierung (vgl. Aufgabe 2)
(Grund-)Vorstellungen zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen	(3) Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild (vgl. Aufgabe 3) (4) Interpretieren eines mathematischen Ausdrucks im Sachkontext (vgl. Aufgabe 4.1 : Sachkontext → mathematischer Ausdruck und Aufgabe 4.2 : mathematischer Ausdruck → Sachkontext)
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen erklären	(5) Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation (vgl. Aufgabe 5) (6) Erklären komplexer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen (vgl. Aufgabe 6)



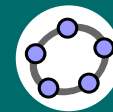
Experimentierumgebung zur Erkenntnisgewinnung

- Vermutungen können sofort überprüft & ggf. korrigiert werden
- funktionale Zusammenhänge werden erfahrbar



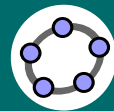
Modellierungswerkzeug („Kreativitäts-/Interpretationskrücke“)

- Manipulation komplexer Modelle
- Verarbeitung realistischer Daten



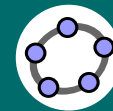
Heuristisches Hilfsmittel („Denkzeug“)

- Routinedenkprozesse auslagern
- Gedächtnis entlasten
- Parametervariation → Interaktion zwischen MMS & Nutzer/in



Kommunikationsmittel

- Darstellung / Visualisierung von Sachverhalten
- Fokussierung auf Wesentliches





2

Unterricht und Prüfungen zusammen denken



Prüfungen sollten ...

- Ziele von Bildungsstandards und Lehrplänen widerspiegeln
- im Einklang mit den Lehr- & Lernpraktiken des Unterrichts stehen
- Lernenden die Möglichkeit geben ihr Wissen und ihre Fähigkeiten geeignet darzustellen

Prüfungen verdeutlichen ...

welche Kenntnisse und Fähigkeiten für wichtig erachtet & honoriert werden
(Art der Aufgaben, geprüfte Fähigkeiten, Anzahl der Bewertungseinheiten, erlaubte Hilfsmittel)

Basis
WS 4

Assessment

should not merely be done to students; rather, it should also be done for students, to guide and enhance their learning.

NCTM: Principles und Standards for School Mathematics

Constructive Alignment

In **Prüfungen** muss qualitativ und quantitativ das abgefragt werden, was auch den **Unterricht** qualitativ und quantitativ prägt.

Henning Körner

Herausforderungen bei Prüfungen

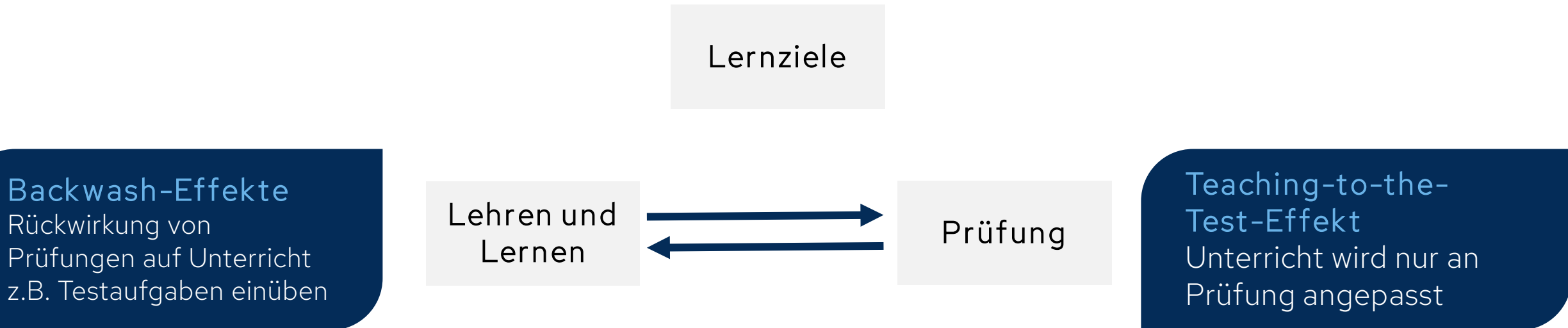


Unterschiedliche Sichtweisen auf Lernziele

Lehrkraft formuliert anspruchsvolle Kompetenzen als Lernziele.

In Prüfung wird nur (prozedurales) Wissen abgefragt.

Für Lernende ist Auswendiglernen der Schlagworte sinnvoller Fokus.



Lehren und **Lernen**, **Lernziele** und **Prüfung** sind nicht im Gleichgewicht, nicht konstruktiv aneinander ausgerichtet
→ keine nachhaltige Kompetenzentwicklung; keine angemessenen Gelegenheiten zum Diagnostizieren und Fördern

Constructive Alignment

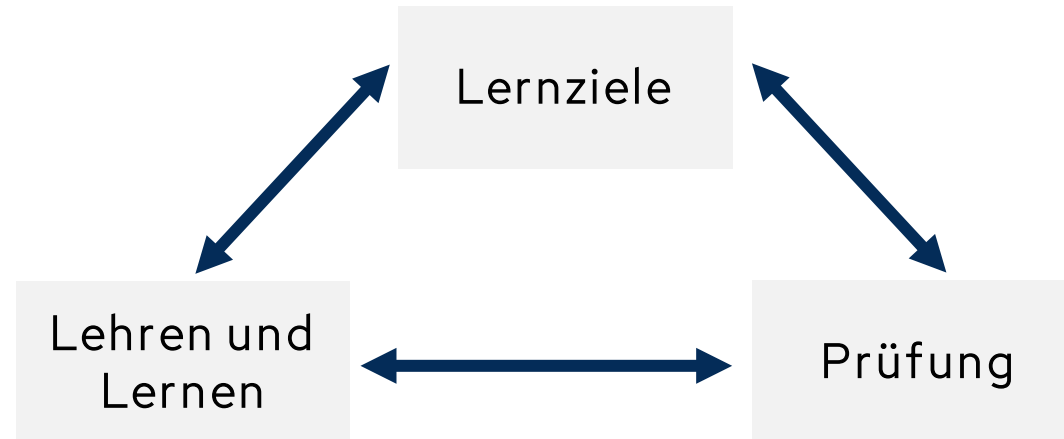


Abstimmung von Lehr- und Lernmethoden sowie Prüfungsformen mit den angestrebten Lernzielen.

Ziel: Zieltransparent und Passung

Angestrebte Ziele
definieren die Aktivität,
die die Lernenden
durchführen

Lernenden nutzen
eigene Aktivität, um
Wissen zu konstruieren



Lernende werden
ermutigt zur Aktivität
und Leistungen anhand
der Ziele bewertet

Constructive Alignment umsetzen

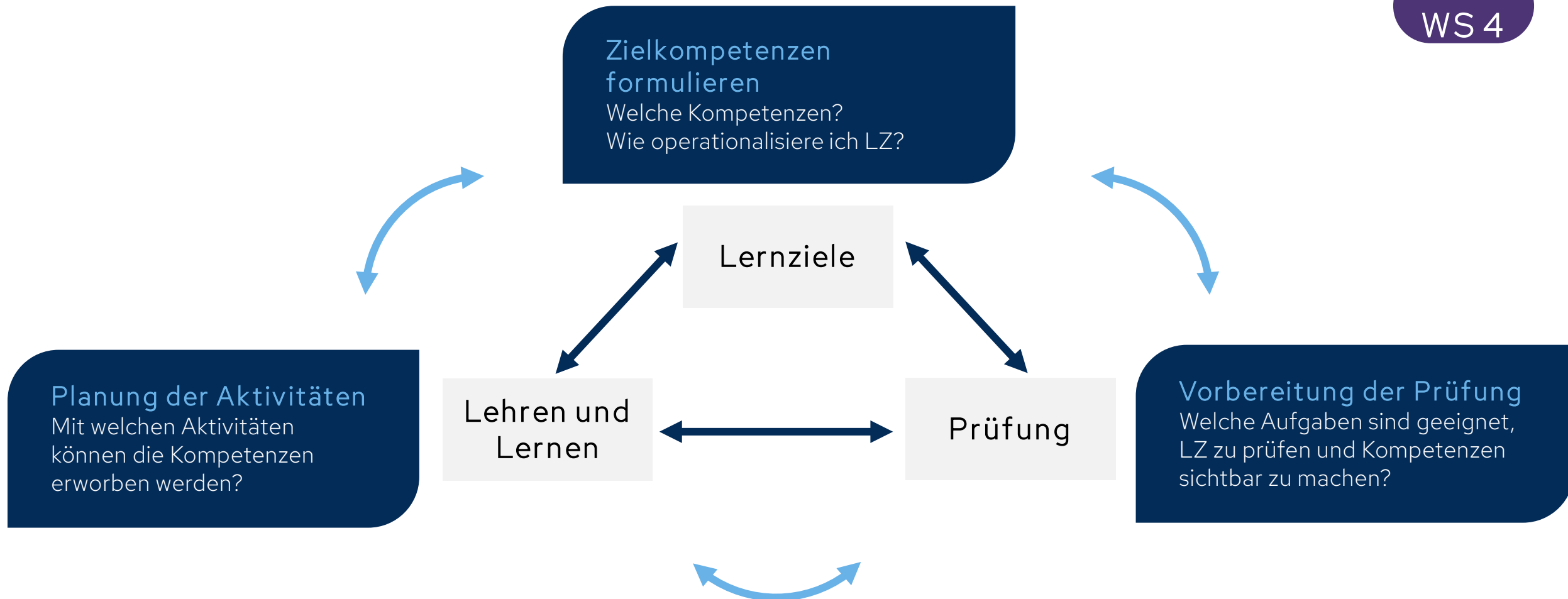


Transparenz

Wie schaffe ich für die Lernenden Transparenz zu Lernzielen und Prüfungsleistungen?

Checklisten
Kompetenzraster

Basis
WS 4



Erinnerung Vortrag Basisqualifizierung Unterrichtseinsatz von MMS & Prüfungen



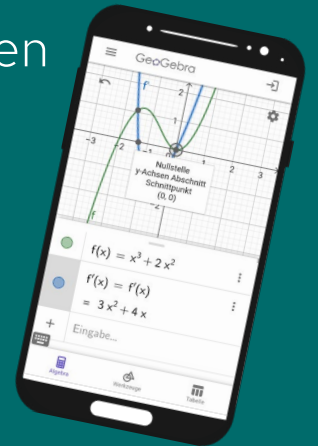
Prüfungsaufgaben: Unterricht **mit**, Prüfung **ohne** MMS

- Standardaufgaben
(ohne Berücksichtigung von MMS)
- Nutzung von mit MMS
gewonnenen Erkenntnissen ➔
- Bildschirmausgaben von
MMS interpretieren ➔
- Beschreiben mehrerer
Vorgehensweisen zur
Lösung mit MMS ➔



Prüfungsaufgaben: Unterricht und Prüfung **mit** MMS

- wie links
→ evtl. komplexer
→ MMS ist Kontrollinstanz
- Schwerpunkt:
Analysieren & Argumentieren
- Problemorientierung
- Realitätsnähe



Erinnerung: Kompetenzorientierte Aufgabe



Aufgabe

Gib die Funktionsgleichung einer Funktion an, für die gilt: $\int_{-1}^3 f(x) dx = 0$
Stelle deinen Lösungsweg nachvollziehbar dar.

Sie sind dran!

1. Welche Werkzeugkompetenzen werden hier benötigt?
2. Im GeoGebra-Buch zu diesem Workshop finden Sie im Abschnitt Werkzeugkompetenz drei Beispiele für Arbeitsblätter, die Werkzeugkompetenz explizit vermitteln.
Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede stellen Sie fest?



MMS-Nutzung durch Lernende



Digitale Lernumgebung



Konfiguration vollständig vorgegeben

Strukturierungs- und Fokussierungshilfen für alle wesentlichen Aspekte (z. B. Farbgebung, Linienstärken, Mitführen von Messwerten, ...)

Elemente können ein- und ausgeblendet werden

Variationsmöglichkeiten bewusst eingeschränkt.

Hybrid



Veränderbare (Teil-)Konfiguration vorgegeben

Kann / muss ergänzt oder verändert werden

Nur einzelne Strukturierungs- und Fokussierungshilfen vorhanden

Digitales Werkzeug



Leere, unstrukturierte MMS-Datei

MMS wird selbstständig und ohne Vorgaben benutzt

Erfordert Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 233–248). Wiesbaden: Springer Spektrum. 

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis**. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109–136). Berlin: Springer Spektrum. 

MMS in Unterricht und Prüfungen

Beschreiben, Erklären, Begründen...



Wo wird schriftlich dokumentiert im Unterricht?

- Papier: Heft, Ordner, Arbeitsblätter, ...
Digital 1: OneNote, Goodnotes, ...
- Digital 2: MMS-Datei
- Papier/Digital 1 und Digital 2

Und wo in der Prüfung?

Basis
WS 3

[...] assessors [...] need to be prepared for shorter written solutions and it is likely that in these written solutions students may have replaced pen-and-paper techniques by descriptions of processes used to solve problems.

(Ball, 2003, S. 192)

Was und wie wird dokumentiert?

- Wie sollen Überlegungen dokumentiert werden? (wie kleinschrittig, Fachsprache...)
- Welche Eingaben und Ausgaben des MMS sollen in welcher Form dokumentiert werden?
- Vorgehensweisen, Beispiel(e) und systematisiertes Ergebnis im Unterricht festhalten!
- In Übungsphasen mehrere individuelle Lösungen vorstellen und besprechen.



Aufgabe

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$. Zeigen Sie, ob die Funktion f Schnittpunkte mit ihrer Ableitungsfunktion hat und bestimmen Sie diese Punkte falls vorhanden.

Sie sind dran!

Lösen Sie die Aufgabe mit GeoGebra und dokumentieren Sie Ihre Lösung.

Diskutieren Sie anschließend zu zweit die beiden Dokumentationen von SchülerInnen auf der nächsten Folie. Was daran halten Sie für angemessen, was eher nicht?





Aufgabe

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$. Zeigen Sie, ob die Funktion f Schnittpunkte mit ihrer Ableitungsfunktion hat und bestimmen Sie diese Punkte falls vorhanden.

$$f'(x) := \frac{d}{dx} (f(x)) \quad \text{solve}(f'(x) = f(x), x) \leadsto x\text{-Werte}$$

Ergebnisse in $f(x)$ oder $f'(x)$ einsetzen (würde das selbe rauskommen)
 $\leadsto y$ -Werte

1. Abl. fkt. bilden: $f'(x) = 6 \cdot x + 5$
 2. in Graphs darstellen
 3. SP d.v. $f(x)$ & $f'(x) \Rightarrow$ gleichsetzen (mit solve)
für y -Werte
 4. SP: $x_1 = -0,43$ $x_2 = 0,76$ $\rightarrow f(x_1); f(x_2)$
- Er SP₁ = (-0,43 | 2,4) SP₂ (0,76 | 9,53)



begegnet SuS in...

- Äußerungen/Dokumenten der Lehrkraft (Tafelbild)
- Schulbüchern, Lernumgebungen, ...
- Aufgabenstellungen und -bearbeitungen

Ich drücke menu-4-1-4

$$f'(x) := \frac{d}{dx} (f(x))$$

CAS $f(x) := x^2 - 6x + 9$
 $\rightarrow \text{solve}(f(x)=0, x)$
 $x=3$

nach x gelöst!

- 1) menu $\rightarrow$ Lists & Spreadsheet hinzufügen
- 2) Bei A Jahr, bei B Anzahl eingeben
- 3) Werte aus Tabelle übertragen

$f(x) = 3,7 \cdot x^2$
 Idee: Löse $1480 = 3,7 \cdot x^2$
 nach x auf.
 CAS: solve($f(x)=1480, x$)
 liefert folgende Ergebnisse:
 $x=20, x=-20$
 Nach 20s ist die Höhe erreicht.
 1s $x=60$, solve($f(x)=13320, x$)

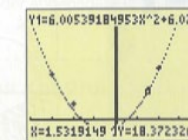
8 Ein quadratisches Modell finden

- a) Zeichne zu der Tabelle ein Streudiagramm. Überzeuge dich davon, dass die Punkte in etwa auf einer Parabel liegen.
- b) Berechne ein quadratisches Modell: Wähle dazu drei beliebige Punkte des Streudiagramms. Berechne mit diesen drei Punkten die Gleichung der Parabel, die durch diese Punkte geht.
- c) Mit dem GTR kann man eine Parabel besonders gut an die Punkte des Streudiagramms anpassen. Vergleiche mit Teil b).

Gib die Tabelle ein.

L1	L2	L3	
-3	30		
-2	10		
0	-10		
1,5	20		
2	34		
3	65		

Zeichne das Streudiagramm und die errechnete Modellparabel.



x	y
-3	30
-2	10
0	-10
1,5	20
2	34
3	65

Übungen

EDIT TESTS
 1:1-Var Stats
 2:2-Var Stats
 3:Med-Med
 4:LinReg(ax+b)
 5:QuadReg
 6:CubicReg
 7:QuartReg

Berechne ein quadratisches Modell. Wähle dazu die quadratische Regression.

QuadReg
 $y = ax^2 + bx + c$
 $a = 6.00539185$
 $b = 6.023134796$
 $c = -4.947836991$

Sie sind dran!



Betrachten Sie die verschiedenen Varianten, wie
Werkzeugsprache genutzt wird.
Wie lassen sich diese kategorisieren?
Welche Kriterien würden Sie daraus ableiten, wann
welche Werkzeugsprache zum Einsatz kommen kann.



$f(x) = 3,7 \cdot x^2$
Idee: Löse $1480 = 3,7 \cdot x^2$
nach x auf.
CAS: $\text{solve}(f(x)=1480, x)$
liefert folgende Ergebnisse:
 $x = 20, x = -20$
Nach 20s ist die Höhe erreicht.
15) $x = 60, \text{solve}(f(x)=13320, x)$

Ich drücke menu-4-1-4

$$f'(x) := \frac{d}{dx} (f(x))$$

CAS $f(x) := x^2 - 6x + 9$
 $\rightarrow \text{solve}(f(x)=0, x)$
 $x = 3$

nach x gelöst.

- 1) menu $\rightarrow$ Lists & Spreadsheet hinzufügen
- 2) Bei A Jahr, bei B Anzahl eingeben
- 3) Werte aus Tabelle übertragen

8 Ein quadratisches Modell finden

a) Zeichne zu der Tabelle ein Streudiagramm. Überzeuge dich davon, dass die Punkte in etwa auf einer Parabel liegen.
b) Berechne ein quadratisches Modell: Wähle dazu drei beliebige Punkte des Streudiagramms. Berechne mit diesen drei Punkten die Gleichung der Parabel, die durch diese Punkte geht.
c) Mit dem GTR kann man eine Parabel besonders gut an die Punkte des Streudiagramms anpassen. Vergleiche mit Teil b).

Gib die Tabelle ein.

x	y
-3	30
-2	10
0	-10
1,5	20
2	34
3	65

Zeichne das Streudiagramm und die errechnete Modellparabel.

Berechne ein quadratisches Modell. Wähle dazu die quadratische Regression.

Übungen

EDIT TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg

QuadReg
 $y = ax^2 + bx + c$
 $a = 6.00539185$
 $b = 6.023134796$
 $c = -4.947836991$



Kriterien für Dokumentation im Unterricht

- nicht nur den Bildschirm abschreiben
- Lösung muss für andere verständlich sein
- Lösung beschreibt mathematische Vorgehensweise, nicht nur die Bedienung des Werkzeugs



Ich drücke menu-4-1-4

manchmal angemessen, aber eben nicht immer!

Potential: Protokoll

- Erinnerungstütze (Beginn einer Unterrichtsreihe)
- genaue Beschreibung des Vorgehens (für Mitschüler)
- Bedienung wird genau dokumentiert

Grenzen: Prüfung

- nicht nachvollziehbar z. B. für FremdkorrektorInnen
- keine mathematischen Argumente – Dokumentation Bedienebene

Aber:

Unterschiedliche Funktion der Dokumentation je nach Unterrichtssituation muss berücksichtigt werden.



Lernsituation: dynamisch und kumuliert

- **Inhaltlicher Fokus:**
Erinnerungsstütze, indiv. Lernwege, mathematischer Inhalt, Hinweise zur Werkzeugnutzung und indiv. Reflexionen
- **Nachvollziehbarkeit:** nur für das Individuum
- **Formalisierungsgrad und Korrektheit:**
je nach Textsorte/Lernphase unterschiedlich (z. B. Spickzettel versus Merkheft)

Prüfungsaufgaben:
normiert und konsolidiert

- **Inhaltlicher Fokus:**
mathematische Inhalte und Prozesse
- **Nachvollziehbarkeit:**
muss für Fremde verstehbar sein
- **Formalisierungsgrad und Korrektheit:**
inhaltlich und fachsprachlich korrekt;
i.d.R. keine Werkzeugsprache;
Schritte mit Werkzeug werden erklärt

Lernsituationen nötig,
die bewusst auf die **Kriterien** von Dokumentationen in Leistungssituation vorbereiten.



Erstellen Sie ein schulinternes Konzept/ einen Orientierungsrahmen für die Dokumentation

- Welche Aspekte sollte ein solches Konzept umfassen (etwa: Leitlinien, Musterlösungen, zentrale Kompetenzen / Befehle, ...)?
- Worauf sollte sich die Fachgruppe verbindlich einigen, was sollte individuell durch die KuK entschieden werden?
- Formulieren Sie vor dem Hintergrund der Beispiele Leitlinien für ein schulinternes Konzept zur Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache.
- Erstellen Sie illustrative Beispiele für Dokumentationen, die Ihre Kriterien verdeutlichen (Good & bad practice)

Thesen zum Einsatz von MMS in Prüfungen

Ein digitales Werkzeug (MMS) ...



sollte in Prüfungen erlaubt sein, zum...

- Problemlösen
- Modellieren
- Visualisieren
- Analysieren

ist in Prüfungen nicht notwendig,
z. B. beim ...

- Interpretieren
- Reproduzieren von Wissen

Digitale Werkzeuge können ein Katalysator dafür sein, bestehende **Prüfungsformen** durch weitere, eher prozessorientierte zu **ergänzen**.





3

GeoGebra Prüfungsmodus



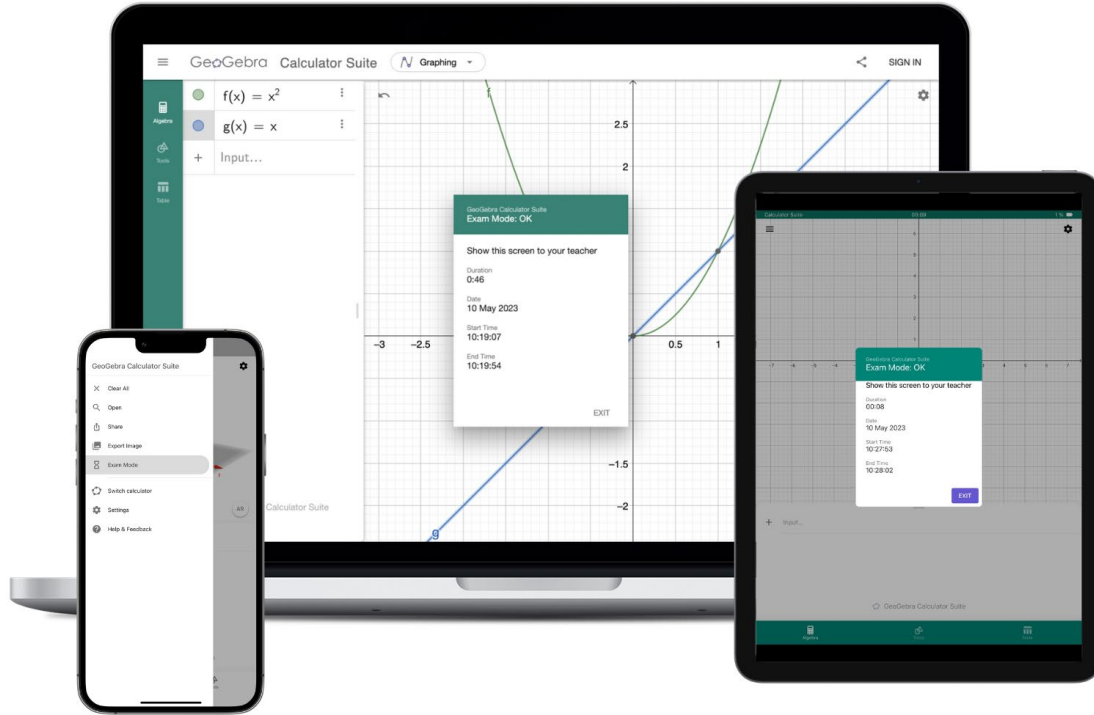
Gründe für den Einsatz aus Lehrplansicht

- neue Formen der Leistungsmessung (LP Ma MSS RLP)
- Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung (Bildungsstandards Ma Sek II)
- Einsatz von Hilfsmitteln und elektronischen Medien sollen sich in der Praxis der Leistungsfeststellung und -bewertung wiederfinden (LP Ma Sek I RLP)

Gründe für den Einsatz aus Schülersicht

- SchülerInnen nutzen GeoGebra eigenständig (in Hausaufgaben, Übungen, ...) genau dann, wenn sie es auch in Tests, Klassen- und Kursarbeiten nutzen können
- Vergleich TR: Sicherheit bei Übungen „Dürfen wir den TR in der Arbeit benutzen?“
- Sind geübt, Aufgaben mit GeoGebra zu lösen, dürfen es nicht mehr, wenn es um Noten geht

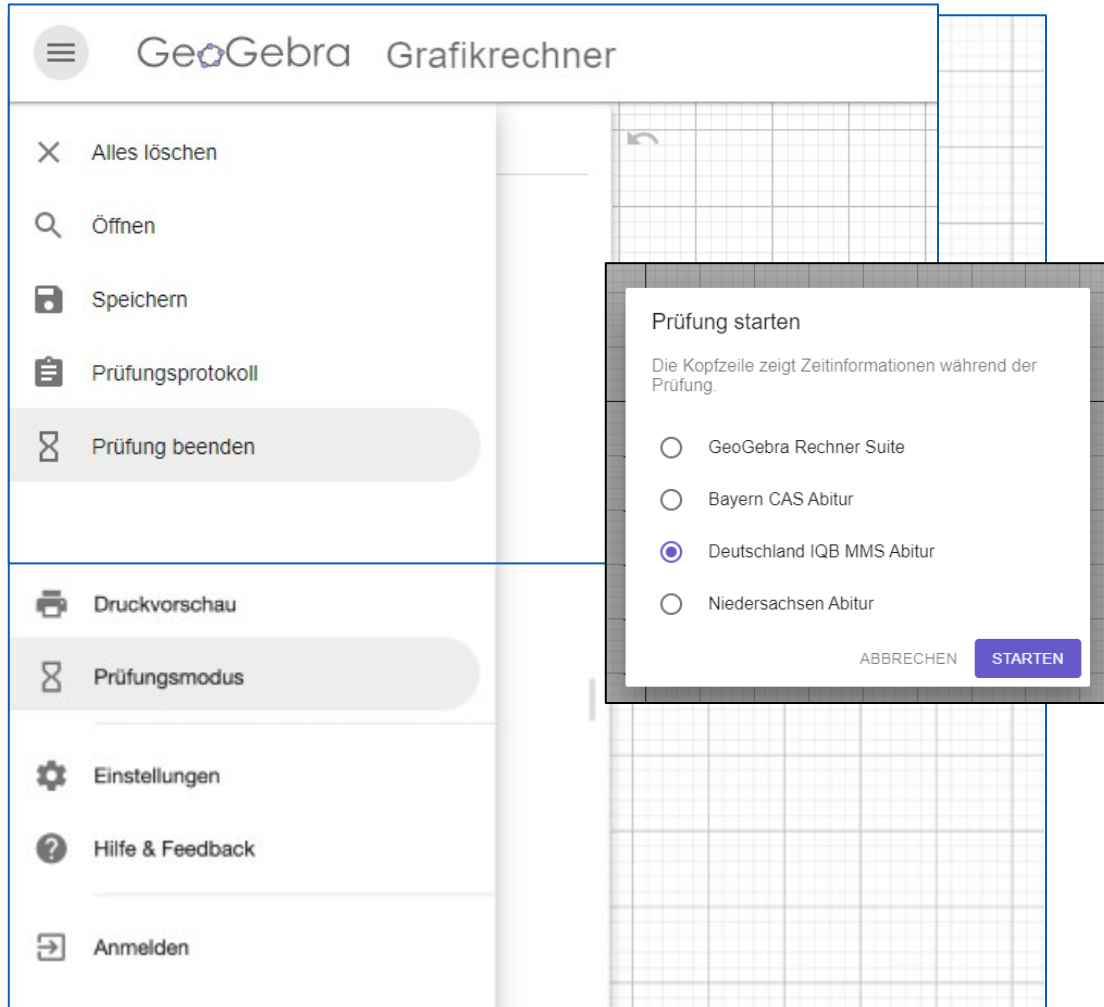
GeoGebra Prüfungsmodus



Unterstützung Prüfungsmodus	 Taschenrechner	 Grafikrechner	 Geometrie	 3D	 CAS	 Suite	 Classic
Tablets & Handys							
iOS	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Android	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Computer							
MacOS		✓	✓		✓	✓	✓
Windows 10		✓	✓		✓	✓	✓
Chromebook		✓					✓

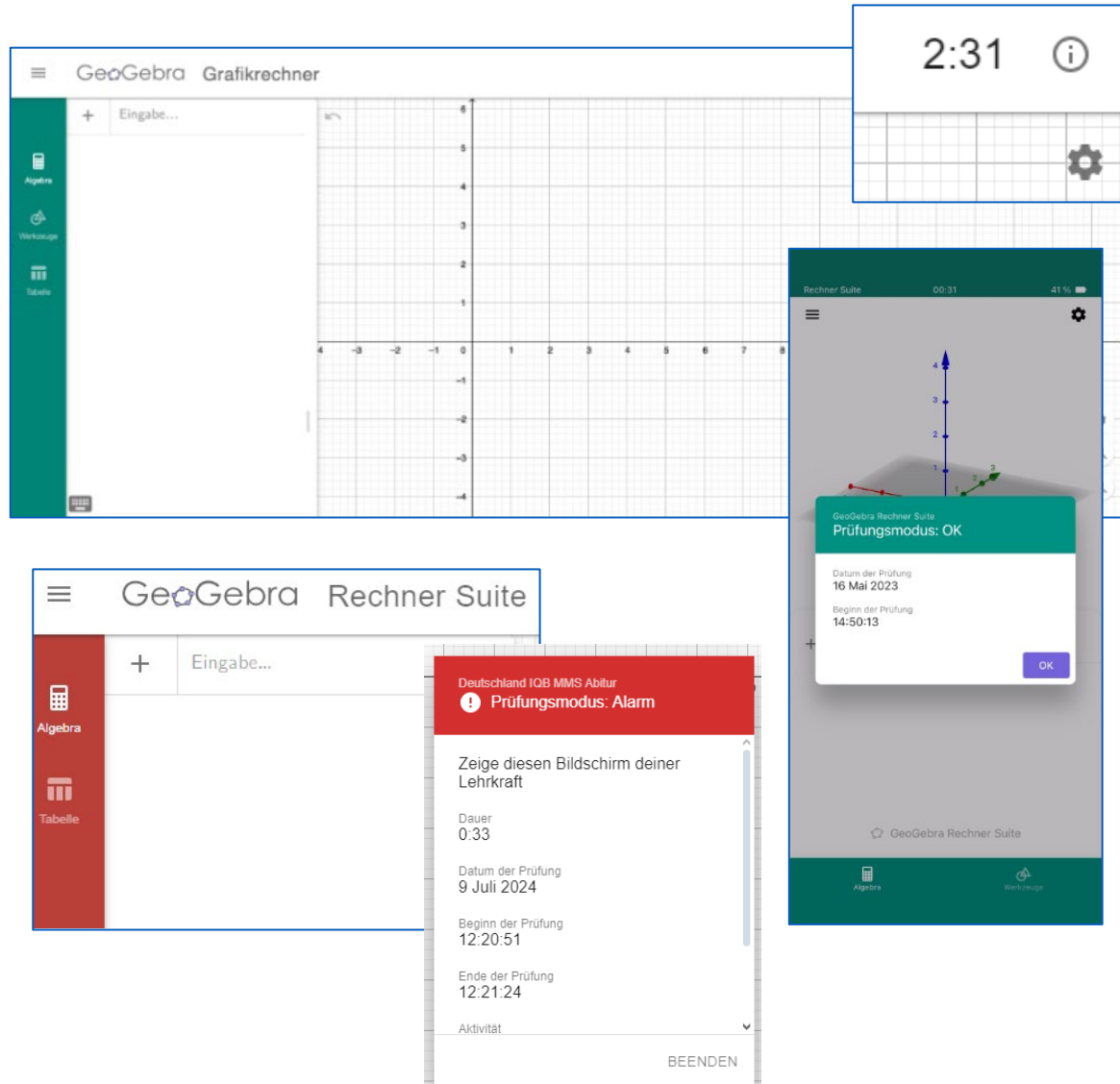
- sperrt mobile Geräte für andere Anwendungen
- Vollbildschirm-Fenster mit visuellem Alarm (dauerhaft) bei Verlassen
- automatisch generiertes Prüfungsprotokoll mit Beginn, Ende und Alarmzeiten
- *Prüfungsmodus* NICHT in der Webversion der Rechner Suite

Prüfungsmodus starten und beenden



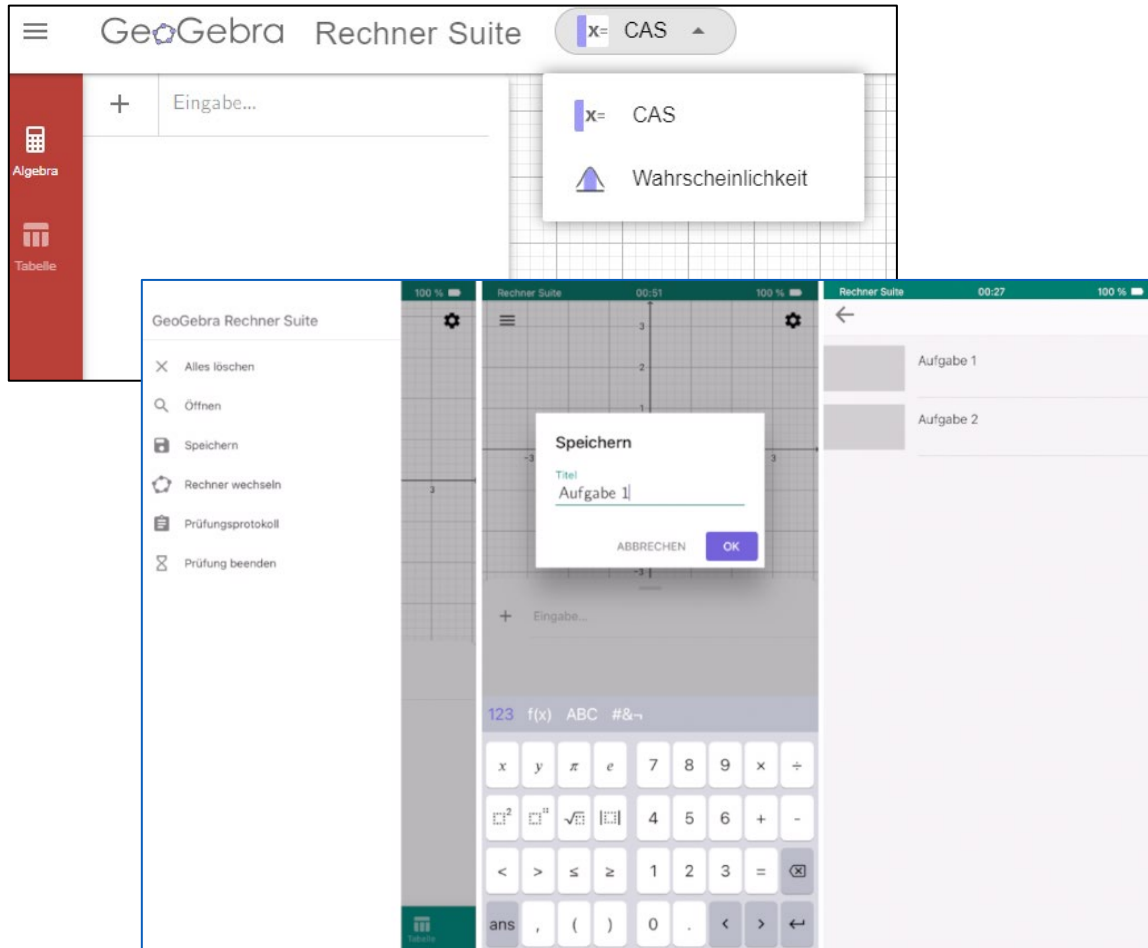
- Starten über Sandwichmenü
 - *Prüfungsmodus*
 - *GeoGebra Rechner Suite* oder zukünftig *Deutschland IQB MMS Abitur*
 - bei Smartphone/Tablet erscheint Aufforderung Flugmodus einzuschalten & Bluetooth zu deaktivieren*
- Beenden über Sandwichmenü
 - *Prüfung beenden*
- zentral für alle SuS starten/beenden mit
 - MDM (*Apple School Manager, Ms Intune, Jamf, ...*)
 - Classroom (*Apple/Google Classroom, ...*)
 - Safer Exam Browser (SEB)
<https://www.geogebra.org/m/y3aufmy8#material/f7cegz3p>

Prüfungsmodus Protokoll

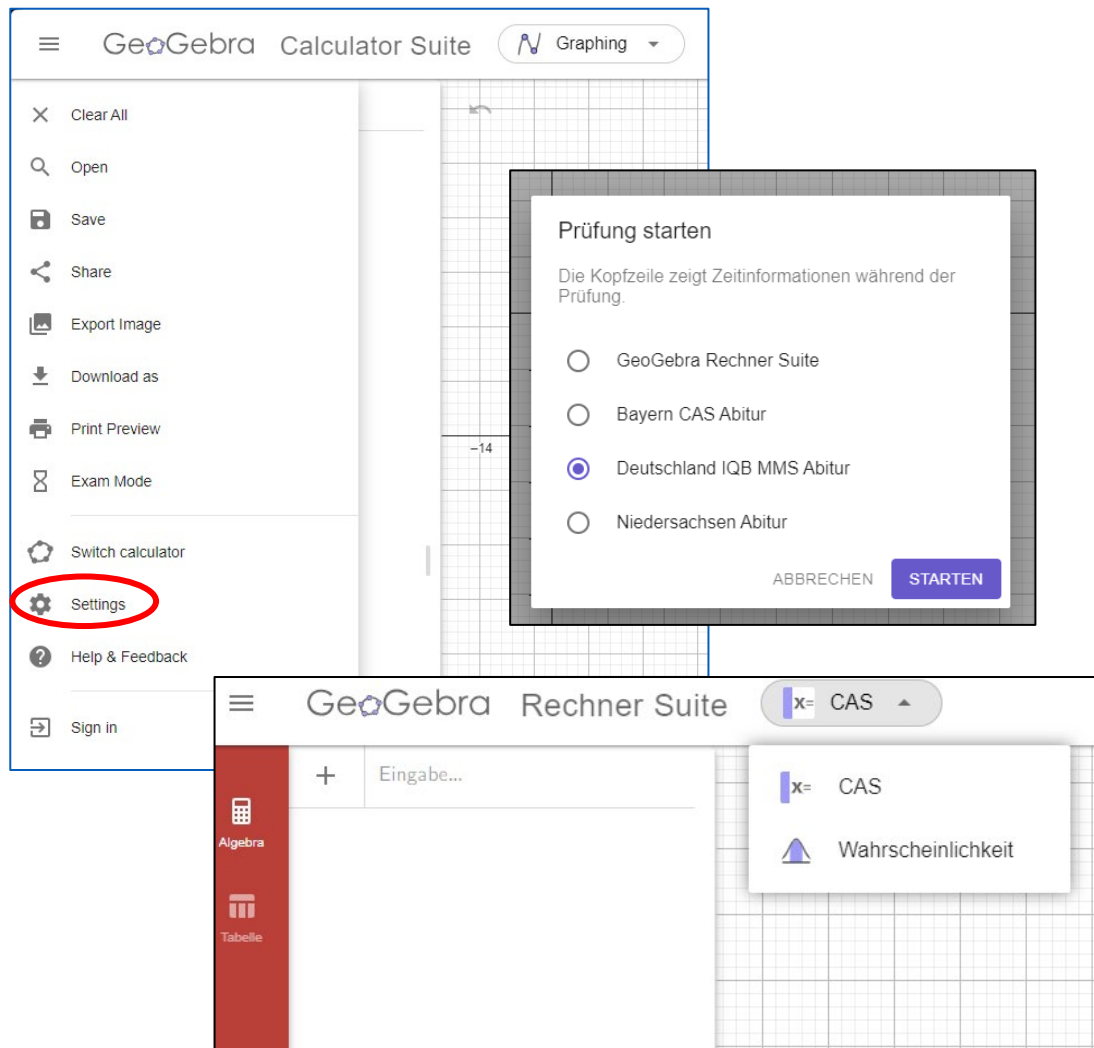


- protokolliert Verlassen der App
- sichtbar über Leiste links (bzw. Kopf-/Fußzeile) grün alles ok, rot Alarm Fenster wurde verlassen
- Prüfungszeit & Info rechts oben (bzw. mittig) Klick öffnet Protokoll mit Alarmzeiten (auch über Sandwichmenü → Prüfungsprotokoll)
- Protokoll erscheint bei Prüfung beenden automatisch und wird gespeichert (<Zeitstempel>.jpg bzw. ExamLog.png)

Prüfungsmodus Funktionen



- Wechsel zwischen Rechnern über Menü oben (bzw. Sandwichmenü → Rechner wechseln)
- Einstellungen im Zahnradmenü rechts oben (Sprache, Dezimalstellen, Achseneinteilung, ...)
- Dateien speichern & öffnen möglich
Sandbox: Dateien nur innerhalb Prüfungen existent
- GeoGebra-Applets über Safer Exam Browser
Beispiel:
<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/rjxvcm3e/width/800/height/500/border/888888/sfsb/true/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/false/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/false>



IQB-zertifizierter Abitur-Modus

- Vorabversion für MaTeGnu: <https://roth.tel/mms>
- *Sprache umstellen* Sandwichmenü links oben
→ *Settings*
(oder Zahnradmenü rechts oben, erneut Zahnradsymbol)
→ *Language: German*
(→ *Runden*: ggf. Dezimalstellen anpassen)
- *Prüfungsmodus* Sandwichmenü links oben
→ *Deutschland IQB MMS Abitur*
- Aktuell: kein 3D-Rechner, kein Grafikrechner
- Änderungen bis Zertifizierung möglich
- Aktuell zertifizierte MMS: 0
<https://www.kmk.org/themen/allgemeinbildende-schulen/bildungswege-und-abschluesse/sekundarstufe-ii-gymnasiale-oberstufe-und-abitur.html>



GeoGebra

Deutsch ▾ 🔍

Hilfe-Center > Lerne GeoGebra

Lerne GeoGebra

Entdecke umfassende App Beschreibungen, vielfältige Materialsammlungen, Schritt-für-Schritt-Anleitungen und FAQs, um deine mathematischen Lern- und Lehrerfahrungen zu verbessern. Tauche ein und nutze das volle Potenzial von GeoGebra, egal ob du Anfänger*in oder fortgeschrittene*r Benutzer*in bist.

Erste Schritte mit GeoGebra

- Die Vielfalt von GeoGebra: Ein Überblick
- GeoGebra Account erstellen
- Vergleich der GeoGebra Mathe Apps
- Selbstlernkurs für Einsteiger*innen
- GeoGebra in Prüfungen**

GeoGebra Apps

- Taschenrechner
- Rechner Suite
- Classic (für Autorinnen und Autoren)
- Notizen

GeoGebra Materialien

- Einleitung zu GeoGebra Materialien
- Finde GeoGebra Materialien
- Erstellen von GeoGebra Materialien
- Verteile Materialien (an Schüler*innen)

GeoGebra Practice

- Einführung in GeoGebra Math Practice
- Lehrer*in: GeoGebra Math Practice im Unterricht
- Schüler*in: Lernen mit GeoGebra Math Practice

Sek II Beispiele mit der Rechner Suite

- Einleitung
- Gleichungen lösen
- Gleichungen auf eine bestimmte Variable umformen
- Gleichungssysteme lösen
- Lineare Funktion mit zwei Punkten aufstellen
- Schnittpunkt zweier Funktionen

Alle 21 Beiträge anzeigen

FAQ

- GeoGebra Apps
- Account
- Installation
- Prüfungsmodus

Mehr zu GeoGebra in Prüfungen:

- Hilfe-Center (Startseite ganz unten)
 - Lerne GeoGebra
 - Erste Schritte mit GeoGebra
- Lerne GeoGebra-Tutorial
<https://www.geogebra.org/m/m97r7cd4>



Während der Unterrichtsreihe

- Entscheidungen zu Prüfungsrahmen frühzeitig festlegen und kommunizieren
 - BYOD oder Schulgeräte
 - CheatSheet (Befehlsliste) erlaubt
 - Zweigeteilte Prüfung?
- Einsatz im Unterricht wiederkehrend üben
 - benötigte Werkzeugkompetenz aufbauen
 - Funktionsumfang Prüfungsmodus
 - Bedienung der Prüfungsendgeräte
- Dokumentation
 - Fach- und Werkzeugsprache
 - Vorgehen beschreiben und begründen





In den Stunden vor der Prüfung

- Alarmfunktion erklären
- Vorgehen bei versehentlichem Alarm klären (Kriterium: Dauer der „Abwesenheit“)
- Szenario techn. Probleme (Ersatzgeräte, Vorgehen beschreiben)
- Betrugsversuche strikt ahnden: klar benennen Was? Wie?
- Ansage: keine gegenseitige Ausleihe (wg. Datei speichern)
- ggf. CheatSheet (Befehlsliste) durchgehen
- **Probelauf** mit Übungsaufgabe(n)
- Prüfung ggf. in Teile strukturieren – Ablauf üben
 - Hilfsmittelfreier Teil
 - MMS-Teil mit separatem Aufgabenblatt



In der Prüfung

- Ablaufvarianten bei zwei Teilen:
 - nur Aufgaben des jeweiligen Teils austeilen, nach Abgabe Bearbeitung
 - feste (max.) Bearbeitungszeit
 - falls MMS-Teil zuerst
 - Ende: Abgabe MMS-Geräte (Bearbeitung kann verbleiben)
 - Zeit, um Protokolle zu prüfen
 - falls hilfsmittelfreier Teil zuerst
 - Ausgabe MMS-Geräte erst danach
 - Protokolldatei per airdrop nach Einsammeln der Bearbeitung
- BYOD kein Gerät: Vorgehen beschreiben lassen
- stichprobenartige Kontrolle (Flugmodus-Zeichen, grüner Balken)
- Lehrkraft: eigenes Handy für Foto (MMS + AB mit Namen daneben)
- keine Angst vor Betrugsversuchen





Zentral verwaltete iPads

- GeoGebra-Prüfungsmodus
 - Individuell wie beschrieben aus GeoGebra-App
 - Zentral über MDM / Apple School Manager
 - Als Safer Exam Browser Lösung
 - ABER: Bluetooth/WLAN muss deaktivierbar sein
- Geführter Modus des iPads
 - Beschränkt Zugriff auf eine App
<https://support.apple.com/de-de/guide/ipad/ipada16d1374/ipados>
 - GeoGebra als App nutzen
 - Kurzleitfaden „Onboard-Prüfungsmodus“
Dank an Hr. Meyberg (Hilda-Gymnasium KO)



Sie sind dran: Laden Sie auf ihrem Handy/Tablet die GeoGebra Rechner Suite herunter (App Store, Play Store) oder nutzen Sie <https://roth.tel/mms>.



Aktivieren Sie ggf. den Flugmodus. Starten Sie den Prüfungsmodus. Wählen Sie die Variante GeoGebra Rechner Suite aus.

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf drei verschiedene Arten:

$$5x + 3y - z = 8$$

$$2x - y + 5 = 4 \quad (\text{nein es fehlt kein } z)$$

$$6x - 8y + 2z = 12$$

Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen!

Sie sind dran – Im Unterricht erproben!



Wählen Sie eine Ihrer Lerngruppen in Mathematik und nehmen Sie sich zum aktuellen Thema die HÜ-/Kursarbeitsaufgaben vor.

- a) Suchen Sie eine eher oberflächliche, prozedurale Aufgabe heraus, lösen Sie diese mit GeoGebra und notieren Sie sich die benötigte Werkzeugkompetenz.*
- b) Üben Sie mit Ihren SchülerInnen im Unterricht an dieser (und ähnlichen) Aufgabe im GeoGebra-Prüfungsmodus.*
- c) Adaptieren Sie die Aufgabe nach dem Vorbild der Beispiele (kognitive Aktivierung).*
- d) Notieren Sie sich ggf. weitere benötigte Werkzeugkompetenzen für die neuen Aufgaben und erarbeiten Sie diese mit den SuS.*
- e) Setzen Sie die adaptierten Aufgaben als Mini-HÜ mit freiwilliger Abgabe ein.*
- f) Bei der Korrektur: welche Dokumentationsformen haben Ihre SuS genutzt?*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Dr. Susanne Digel

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

s.digel@rptu.de

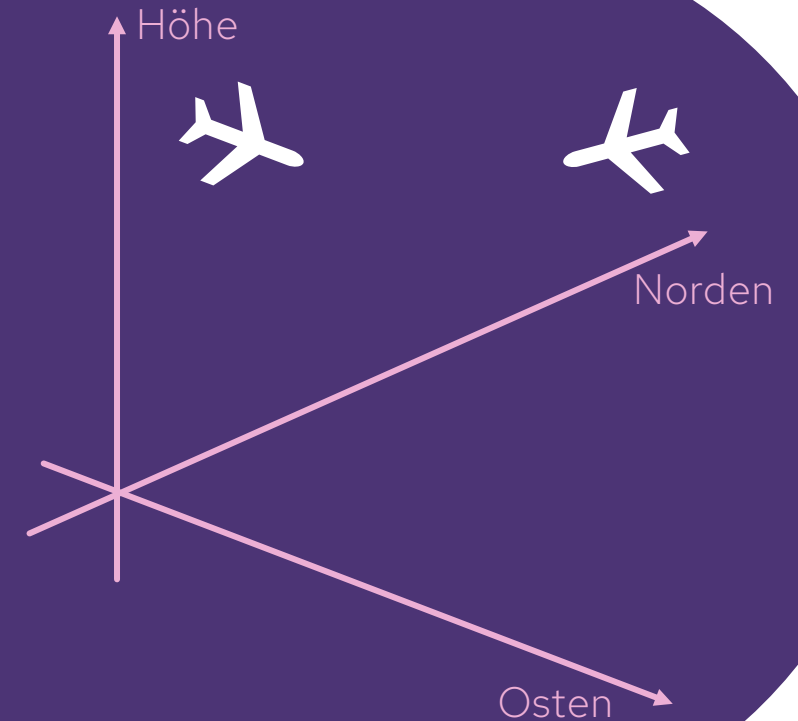
<https://dms.nuw.rptu.de/mategnu>



Aufgabe 1 – Flugsicherung

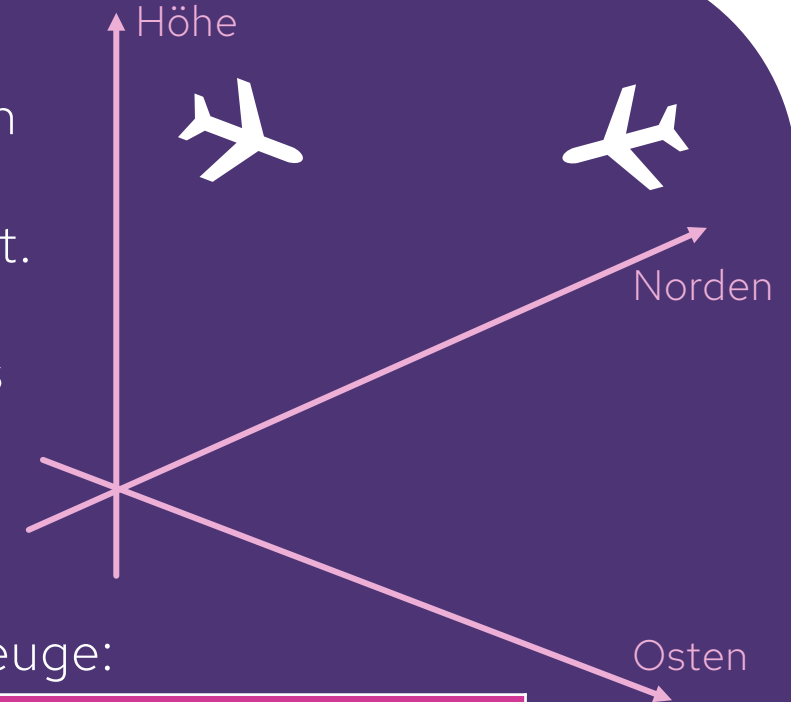
„Glück gehabt?!“, denkt sich Herr Falk, der Fotograf dieser beiden Kondensstreifen.

Gegen 11:00 Uhr morgens im Abstand von nur wenigen Sekunden, ziehen zwei Flugzeuge am Himmel vorbei. Die Bahnen der zwei Flugzeuge scheinen sich zu kreuzen und wäre die erste Maschine nur etwas später gekommen, dann wäre eine Kollision wohl nicht zu verhindern gewesen.





Aufgabe 1 – Flugsicherung: Neben den Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Flugs über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeugs zur Antenne, die Höhe des Flugzeugs und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten – Norden, Osten, Höhe – (jeweils in Meter) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor.



Auf Nachfrage erhält Herr Falk jeweils drei Orte für die beiden Flugzeuge:

Flugzeug \ Zeit	11 : 10 : 10	11 : 10 : 15	11 : 10 : 20
Boing 767-299	(80, 112, 10380)	(1102, 978, 10366)	(2132, 1843, 10370)
Douglas DC 10-30F	(-78, 2302, 10045)	(988, 1103, 10062)	(2054, -96, 10079)



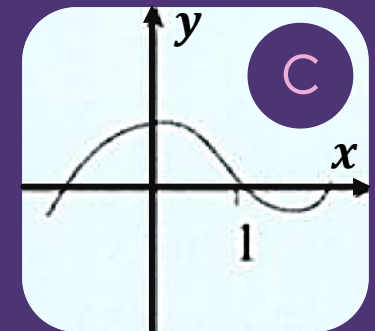
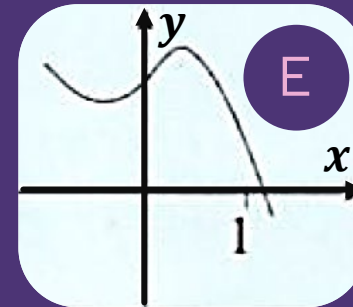
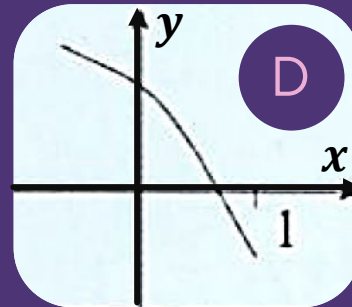
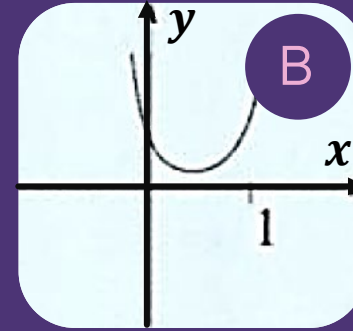
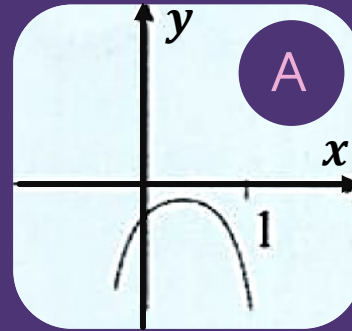
Aufgabe 2 – Graphen analysieren

Lernende sollten einen Funktionsgraph skizzieren, der alle folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $f'(0) < 0$,
- $f'(1) < 0$ und
- $f''(x)$ ist immer negativ

Analysieren Sie die nebenstehenden fünf von Lernenden skizzierten Funktionsgraphen **A**, **B**, **C**, **D** und **E**.

Geben Sie an, welche(r) der Graphen die geforderten Eigenschaften aufweist und begründen Sie Ihre Antwort.

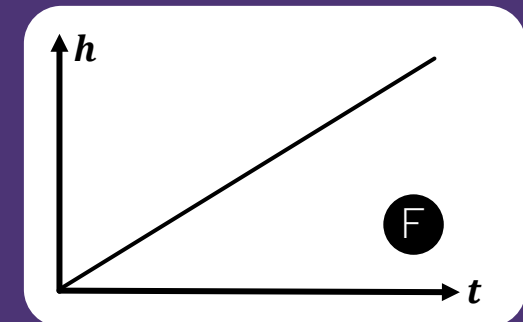
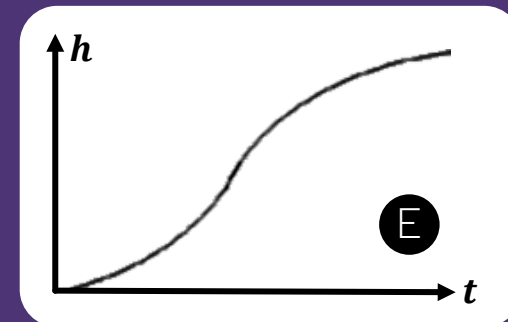
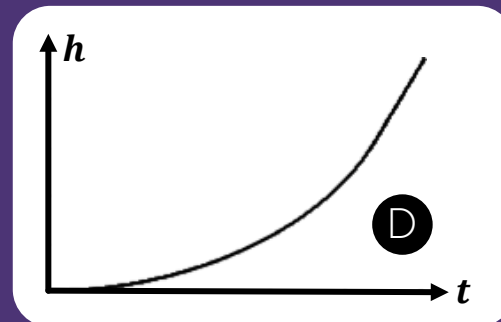
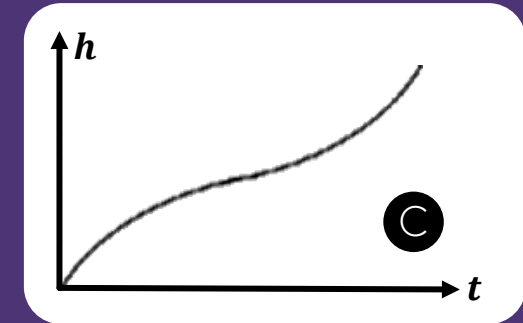
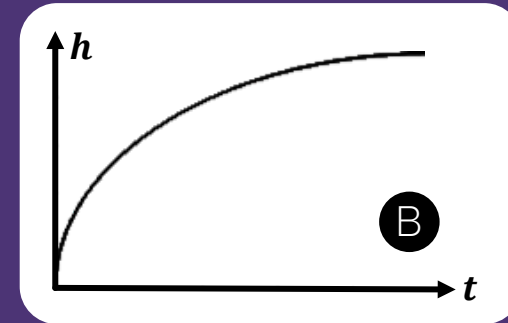
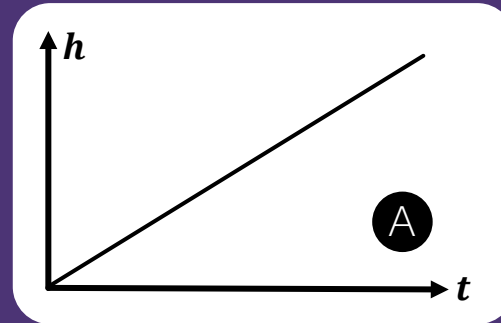
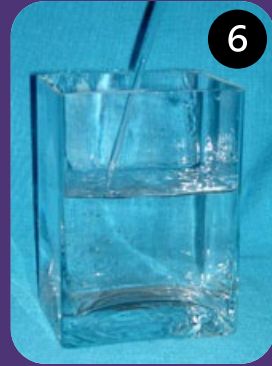
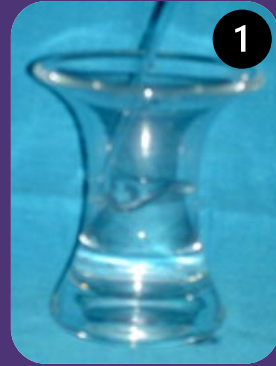


Aufgabe 3 – Gefäße füllen

Verschiedene Gefäße mit den Nummern 1 bis 6 werden gleichmäßig (mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit) mit Wasser gefüllt.

Die Funktionsgraphen A bis F stellen jeweils den funktionalen Zusammenhang zwischen der Füllhöhe h eines Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit t dar.

Ordnen Sie den Gefäßen jeweils einen passenden Funktionsgraph zu und begründen Sie Ihre Auswahl.



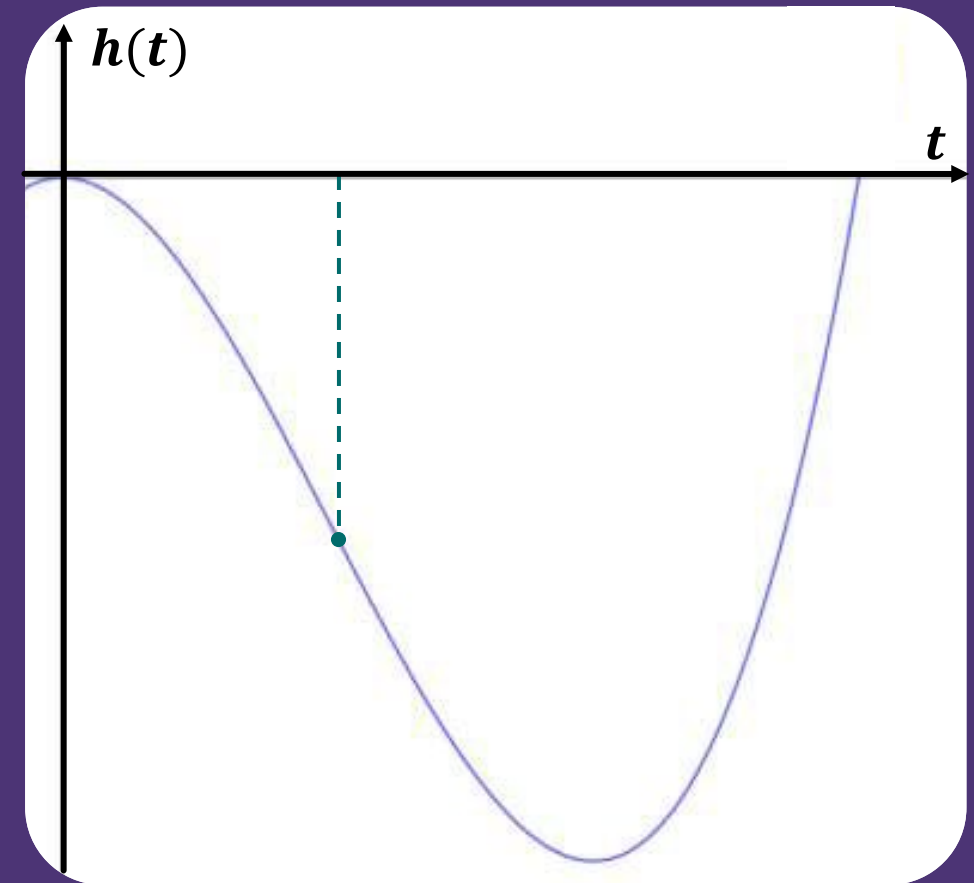


Aufgabe 4.1 – Tauchvorgang

Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch eine Funktion $h(t)$ beschrieben, deren Graph rechts dargestellt ist. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t ist die Zeit in Stunden.

- a) Beschreiben Sie die Situation zum eingezeichneten Zeitpunkt t im Sachzusammenhang.
- b) Erklären Sie mathematisch mithilfe des Graphen, dass das U-Boot zum eingezeichneten Zeitpunkt t am schnellsten sinkt.

→ Finden Sie aus Sicht jeder der vier Grundvorstellungen eine Erklärung!

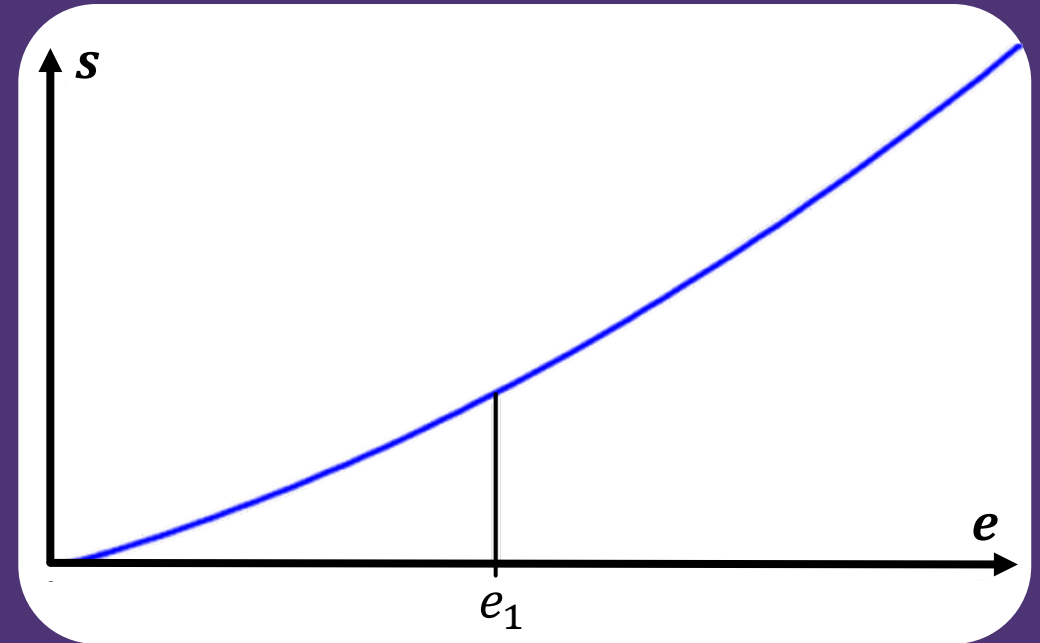




Aufgabe 4.2 – Einkommenssteuer

Es sei $s: e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet. e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).

- a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $\frac{s(e_1)}{e_1}$.
- b) $s'(e_1)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff.
- c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro. Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{s(e_1+h) - s(e_1)}{h}$.
- d) Interpretieren Sie die Ungleichung $\frac{s(e_1+h) - s(e_1)}{h} \geq \frac{s(e_1)}{e_1}$.
- e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.





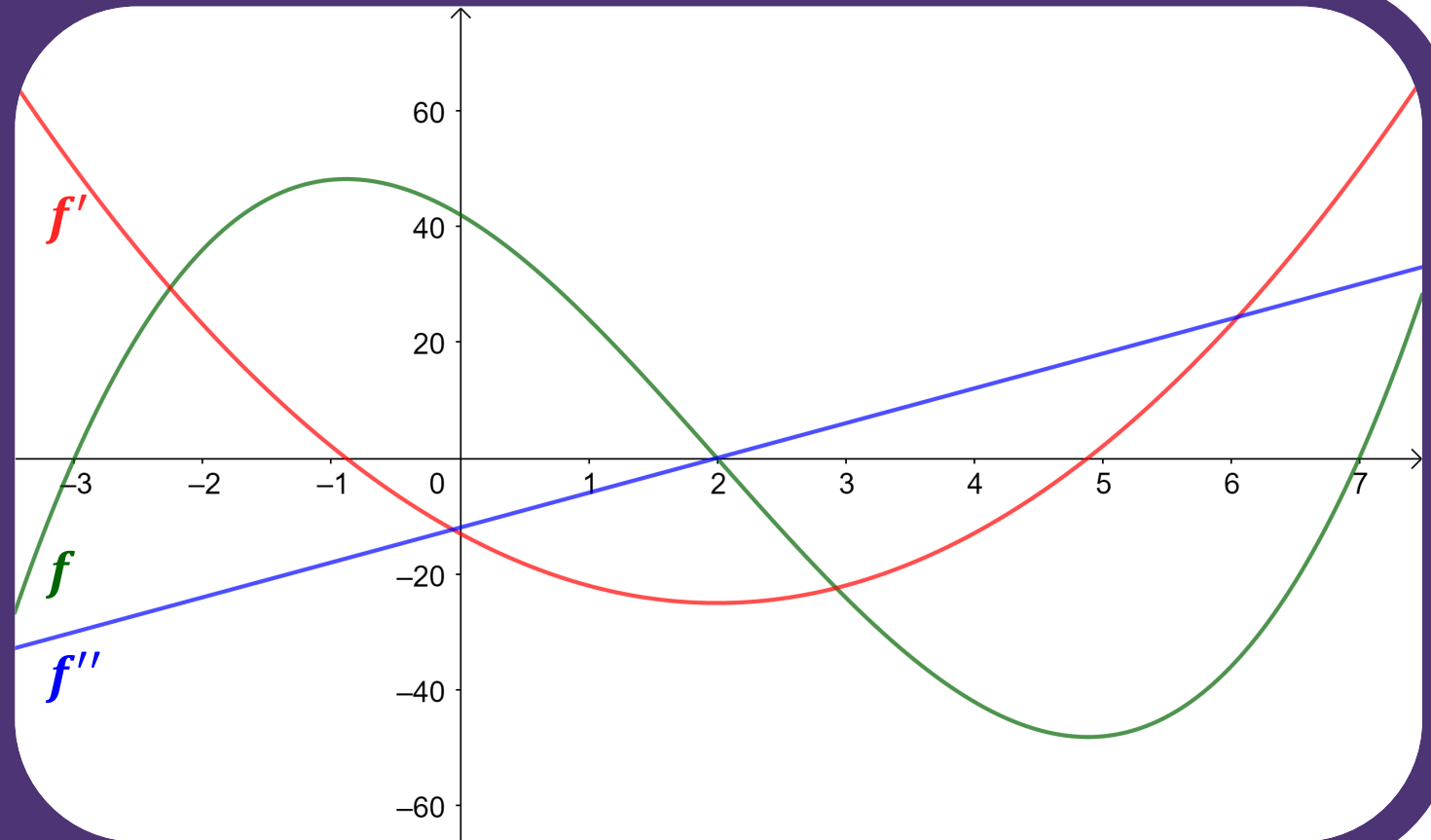
Aufgabe 5

Rechenverfahren erklären

Um eine Maximalstelle zu bestimmen, sind zwei Schritte notwendig:

- (1) Man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und
- (2) überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.

Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten (1) und (2) eine Maximalstelle erhält.

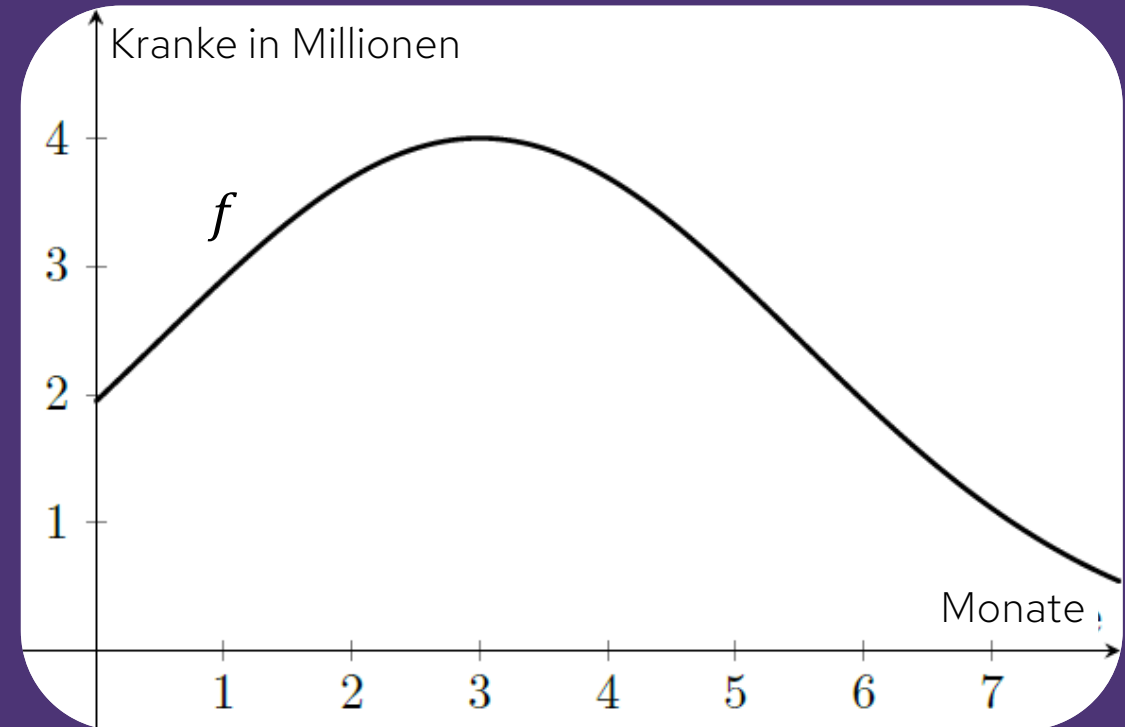




Aufgabe 6 – Grippewelle

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

- a) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' .
- b) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$ im Sachzusammenhang.
- c) Erklären Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.

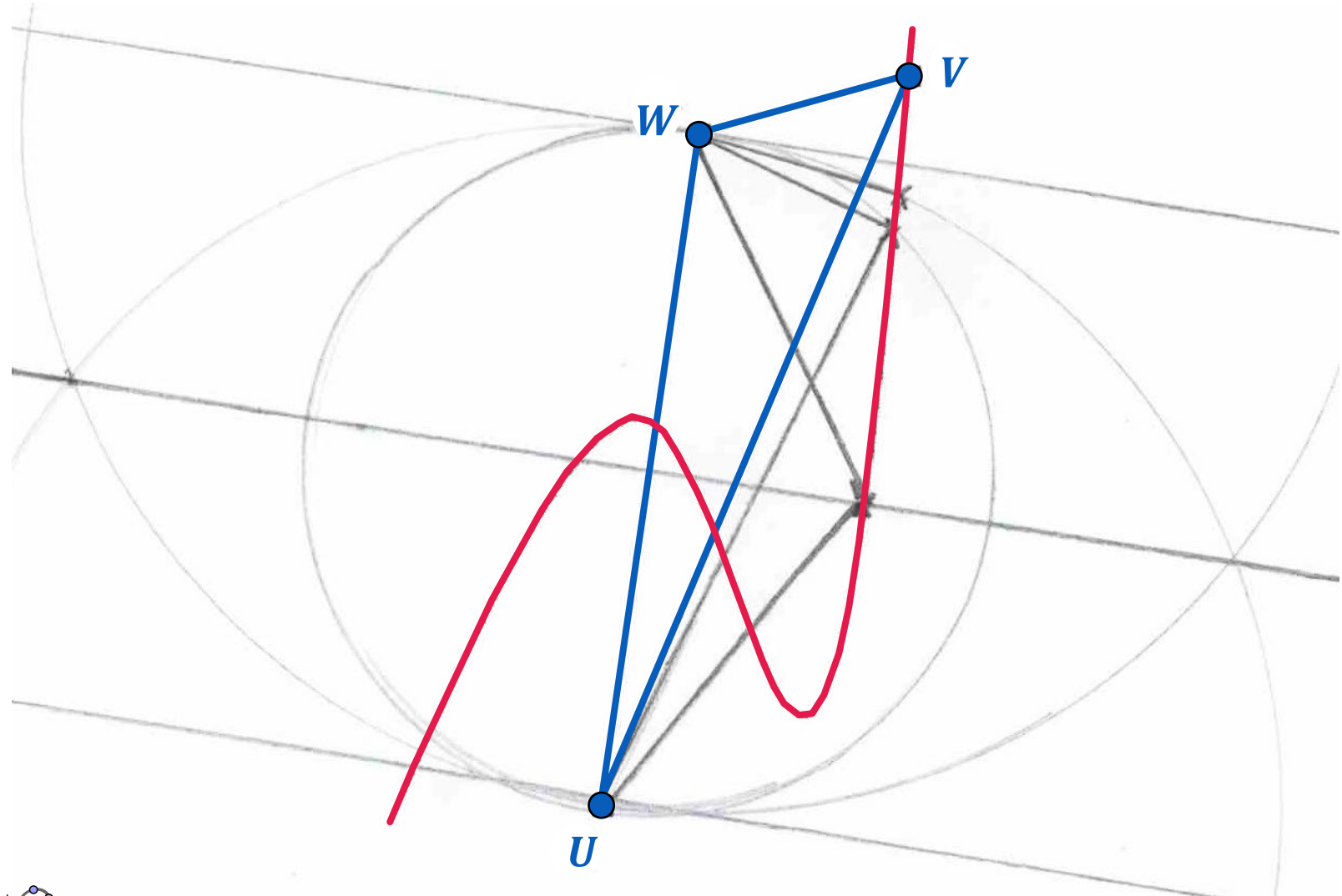


Prüfungsaufgabe: MMS-Erkenntnisse nutzen



Aufgabe

- Der Punkt V wird entlang der eingezeichneten Kurve nach links unten bewegt.
- Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck UVW dabei der Reihe nach an?



<https://www.geogebra.org/m/NRtMBwU>

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Prüfungsaufgabe: MMS-Bildschirmausgabe interpretieren



Aufgabe

- Erklären Sie den Bildschirmausdruck.
- Es ist günstig, eine Zeile nach der anderen zu erklären.

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

■ sqrt((xa - xb)^2 + (ya - yb)^2) -> ent(xa, xb, ya, yb) Done
■ ent(2, -1, 8, 4) 5
■ ent(2, -1, ya, 4) sqrt(ya^2 - 8*ya + 25)
■ solve(ent(2, -1, ya, 4) = 3, ya) ya = 4
■ solve(ent(2, -1, ya, 4) = 3, ya)
DATA RAD AUTO FUNC 4/30
```

Aus einer Schülerbearbeitung:

In der ersten Zeile wurde der Baustein für den Abstand zweier Punkte eingegeben. Die Punkte sind im Allgemeinen $(x_a|y_a)$ und $(x_b|y_b)$. In der zweiten Zeile wurden die genauen Koordinaten der Punkte eingegeben. Der Voyage berechnet also den Abstand der Punkte $(2|8)$ und $(-1|4)$. Man bekommt 5 als Lösung. Danach wird für y_a kein Wert mehr eingegeben, deshalb ist der Punkt im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur y -Achse durch den Punkt $(2|0)$. Der Voyage löst die Eingabe nicht, da noch eine Variable, nämlich y_a vorhanden ist. In der letzten Zeile wurde der Abstand der Punkte $(2|y_a)$ und $(-1|4)$ vorgegeben (er ist 3), und der Voyage sollte y_a ausrechnen, wobei er auf $y_a = 4$ kommt.

Prüfungsaufgabe: (Mehrere) Vorgehens-weisen zur Lösung mit MMS beschreiben



Aufgabe

Beschreibe drei Möglichkeiten wie du mit MMS die Schnittstellen des Graphen der Funktion f mit der x -Achse bestimmen kannst.

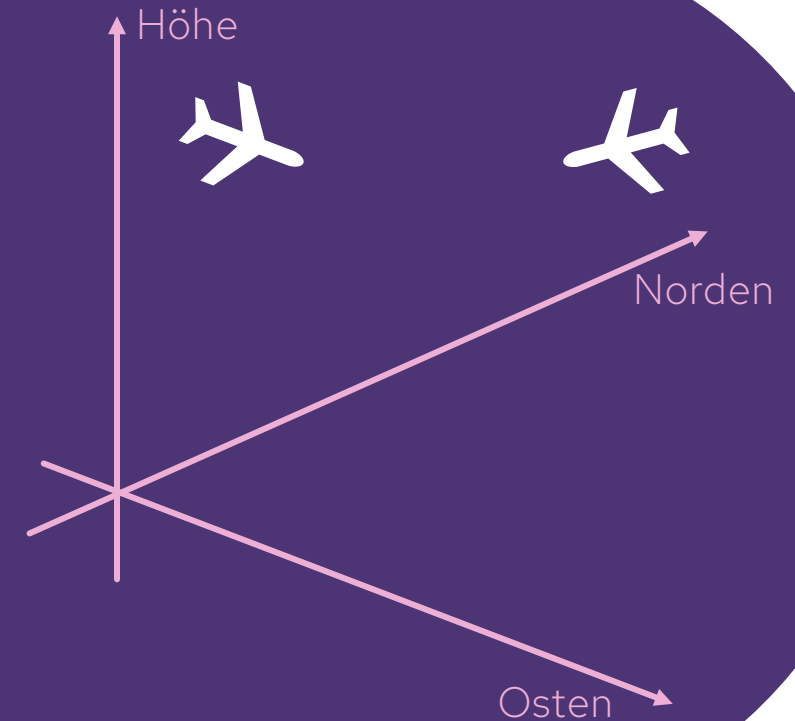
$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x - 12)^4 - 5$$

Prüfungsaufgabe: Problemorientierung und Realitätsnähe



Flugsicherung

„Glück gehabt?!“, denkt sich Herr Falk, der Fotograf dieser beiden Kondensstreifen. Gegen 11:00 Uhr morgens im Abstand von nur wenigen Sekunden, ziehen zwei Flugzeuge am Himmel vorbei. Die Bahnen der zwei Flugzeuge scheinen sich zu kreuzen und wäre die erste Maschine nur etwas später gekommen, dann wäre eine Kollision wohl nicht zu verhindern gewesen.

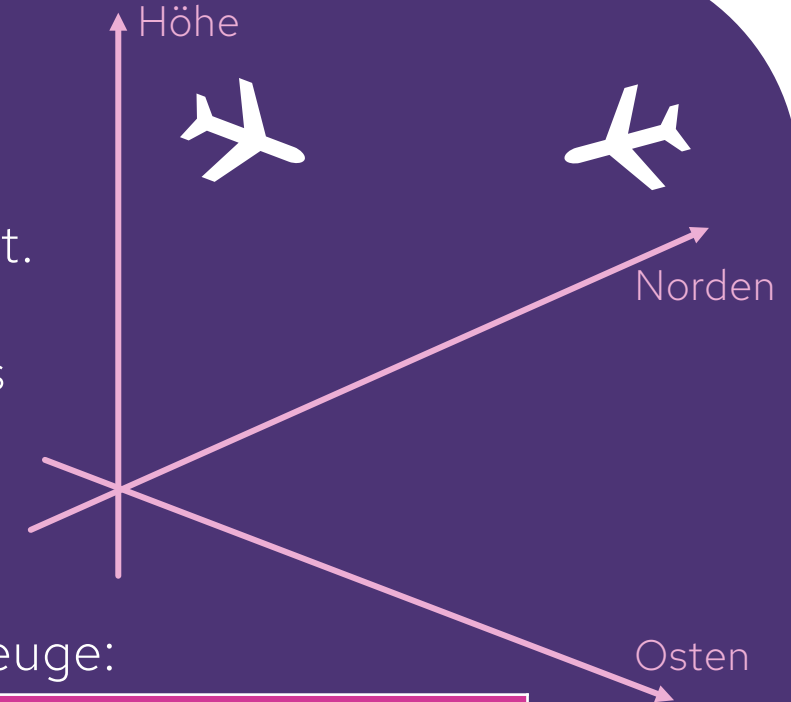


Prüfungsaufgabe:

Problemorientierung und Realitätsnähe



Problem Flugsicherung: Neben den Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Flugs über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeugs zur Antenne, die Höhe des Flugzeugs und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten – Norden, Osten, Höhe – (jeweils in Meter) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor.



Auf Nachfrage erhält Herr Falk jeweils drei Orte für die beiden Flugzeuge:

Flugzeug \ Zeit	11 : 10 : 10	11 : 10 : 15	11 : 10 : 20
Boing 767-299	(80, 112, 10380)	(1102, 978, 10366)	(2132, 1843, 10370)
Douglas DC 10-30F	(-78, 2302, 10045)	(988, 1103, 10062)	(2054, -96, 10079)